

Exercise 1

3.5/4 TP

1.1a

$$x := x_1 + i x_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x} &= \dot{x}_1 + i \dot{x}_2 = \alpha x_1 - \beta x_2 + i \beta x_1 + i \alpha x_2 \\ &= (\alpha + i \beta)(x_1 + i x_2) \\ &= (\alpha + i \beta) x \\ &= \gamma x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \gamma x$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } x(t) = x_0 \cdot e^{\gamma t} \quad \checkmark$$

1.1b

$$\alpha + i\beta = \gamma = r \cdot e^{i\varphi}$$

komplexe Schreibweise

$$\Rightarrow r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Asymptotisch stabil: $\alpha < 0$

denn dann:

$$x_0 \cdot e^{\gamma t} = x_0 \cdot e^{(\alpha + i\beta)t} = x_0 e^{\alpha t} \underbrace{e^{i\beta t}}_{| \cdot | = 1}$$

$$\Rightarrow x_0 \cdot e^{\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \checkmark$$

Aber $\alpha = 0$:

$$x_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t} \Big|_{t = \frac{2\pi n}{\beta}} = x_0 e^{i2\pi n} = x_0 \quad n \in \mathbb{N}$$

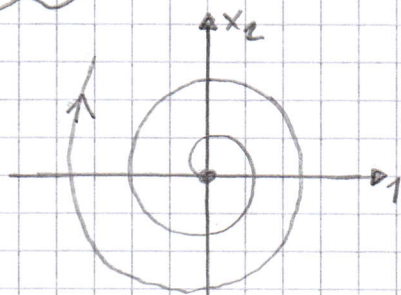
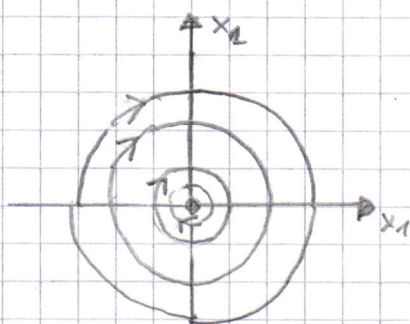
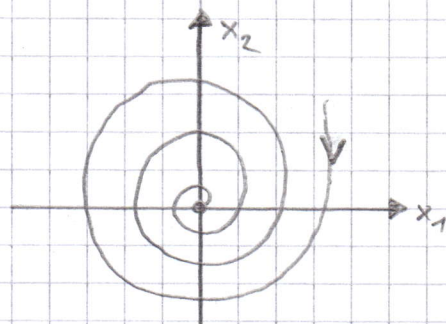
$$x_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t} \Big|_{t = \frac{2\pi n + \pi}{\beta}} = x_0 e^{i2\pi n + i\pi} = -x_0$$

 $\Rightarrow$ Nicht asymptotisch stabilaber stabil?
Bedingung auf β ? $\alpha > 0$:

$$|x_0 e^{\alpha t}| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

 $\Rightarrow$ Nicht asymptotisch stabil

1.1c

unstable
 $\alpha > 0$ stable
 $\alpha = 0$ asymptotically
stable
 $\alpha < 0$

Bei den Zeichnungen:

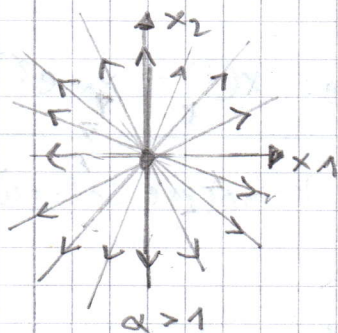
$$\beta < 0$$

asymptotisch stabil natürlich auch stabil.

Startet man nahe $x_* = 0$ wird man mit der Zeit entweder näher oder weiter entfernt ankommen.

Für $\beta > 0$ sind die Bilder spiegelverkehrt.

Für $\beta = 0$ gibt es nur radiale Komponenten:



usw.

A 2 a)

Code:

$$f = @(t,x) [x(1)^3 - x(2); -x(1)]$$

• `OPTIONS = odeset('output Fcn','odephas2')`

Für den Startwert $x_1 = 0,1$ und $x_2 = 0,2$

• sieht das Diagramm stabil aus.

`(ode23(f,[0 10],[0.1 0.2],OPTIONS))`

Für den Startwert $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$

~~ist die~~ sieht das Diagramm instabil aus (Werte werden deutlich größer)

`(ode23(f,[0 10],[1 1],OPTIONS))`

Plots?

0,5/1 PP

1.3d $\dot{x} = f(x)$

$$\dot{x}_1 = 1 - \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2)$$

Fixpunkt: $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $0 = 1 - \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2$

$$\Leftrightarrow 2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = \pm \sqrt{2}$$

und

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2)$$

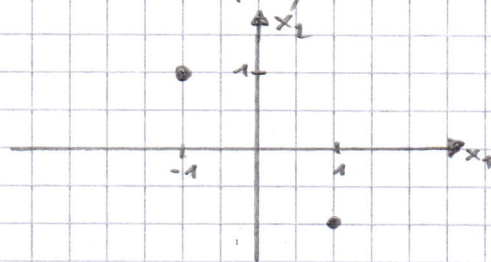
$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_1 + x_1 = 2x_1 = \pm \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ Fixpunkte: $x_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $x_{**} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓



1.3b

Linearisierung: $y = x - x_*$

$$1 - \frac{1}{2} ((x_{*1} + y_1) - (x_{*2} + y_2))^2 = 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{2} + y_1 - y_2)^2$$

$$= 1 - 1 - 2(y_1 - y_2) - (y_1 - y_2)^2 = -2(y_1 - y_2) + 2y_1y_2 + o(\|y\|)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} ((x_{*1} + y_1) + (x_{*2} + y_2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (y_1 + y_2)$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{EW: } (-2-2)(\frac{1}{\sqrt{2}}-2) - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + (2 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \lambda - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = - (2 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \pm \sqrt{(2 - \sqrt{\frac{1}{2}})^2 + \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 / \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = 2 / \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ Fixpunkte Instabil, da $\max \lambda > 0$

$$1,5/2$$

A4

a) Charakteristisches Polynom aufstellen:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos(t)^2 - \lambda & 1 - \frac{3}{2} \cos(t) \sin(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \cos(t) \sin(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin(t)^2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 + \frac{3}{2} \cos(t)^2 - \lambda) \cdot (-1 + \frac{3}{2} \sin(t)^2 - \lambda) \\ &\quad - (1 - \frac{3}{2} \cos(t) \sin(t)) \cdot (-1 - \frac{3}{2} \cos(t) \sin(t)) \\ &= +1 - \frac{3}{2} \sin(t)^2 + \lambda - \frac{3}{2} \cos(t)^2 + \frac{9}{4} \cos(t)^2 \sin(t)^2 \\ &\quad + 1 - \frac{3}{2} \lambda \sin(t)^2 + \lambda^2 - \frac{3}{2} \cos(t)^2 \lambda \\ &\quad - (\frac{9}{4} \cos(t)^2 \sin(t)^2 - 1) \\ &= 2 - \frac{3}{2} + 2\lambda - \frac{3}{2} \lambda + \lambda^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{8}{16}} \\ &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{-7}{16}} = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{1}{4} (-1 \pm i\sqrt{7}) \end{aligned}$$

✓

b)

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{7}{4}$$

Hängt also nicht von t ab. ✓

(Wieder ist $\forall \lambda \in \sigma(A) \quad s(\lambda) = r(\lambda)$)
~~derwegen lässt sich Proposition 2.2.6~~
~~anwenden, aber~~

Nach Prop 2.2.6 ist es stabil
 und asymptotisch stabil,
 $(-\frac{7}{4} < 0)$

Nein!

Prop. 1.1.6. ist nur auf
 autonome Dgl. anwendbar!

$$\left(\tau \frac{2}{4} \right) \sin \left(\tau \cos \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\tau + \tau \frac{\pi}{4} - \tau \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \tau =$$

$$\tau + \tau \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} =$$

Multiplizieren

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau + \tau \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau + \tau \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\tau + \tau \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\pi}{4} =$$